$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

مثال: حل

$$I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$u = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow du = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$I_1 = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\rightarrow I_1 = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} - 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$I_1 = \frac{x}{1+x^2} + 2I_1 - 2I_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{2}I_1 \quad \cdots *$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

بموضوعنا *

$$I_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + C_1$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

تمرين :

$$I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

$$u = \frac{1}{(1+x^2)^3} \Rightarrow du = \frac{-4x}{(1+x^2)^3} dx$$

$$dv = dx \longrightarrow x = v$$

$$I_2 = \frac{x}{(1+x^2)^3} + 4\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^3} dx$$

$$I_2 = \frac{x}{(1+x^2)^3} + 4\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} - \frac{4}{(1+x^2)^3}$$

$$I_2 = \frac{x}{(1+x^2)^2} + 4I_2 - 4I_3$$

$$4I_3 = \frac{x}{(1+x^2)^2} + 3I_2$$

$$I_3 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} I_2 \quad \text{---} \quad (1)$$

نجد $I_2$ ثم نعوض في (1) ←

$$I_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C_1$$

↓

$$I_3 = \frac{1}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\left( \quad \right)$$

مثال :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad x = t^6, \quad x^{\frac{1}{6}} = t$$

$$dx = 6t^5 dt$$

$$\sqrt[3]{x} = t^3, \quad \sqrt{x} = t^2$$

$$6\int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3 \cdot dt}{t+1}$$

$$t+1 \;\big|\; t^3 \qquad t^2 - t + 1$$

$$-t^3 - t^2$$

$$-t^2$$

$$+t^2 + t$$

$$+t$$

$$-t - 1$$

$$-1$$

$$= 6\int \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= 6\left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(t+1) \right] + C$$

مثال:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$$

$$t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \leftarrow t^2=\frac{1-x}{1+x}$$

$$t^2+xt^2=1-x$$

$$x+xt^2=1-t^2$$

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx=\frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$\rightarrow dx=\frac{-2t-2t^3-2t+2t^3}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$dx=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$-4\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{(1+t^2)\,dt}{1-t^2}$$

نعوض:

$$=-4\int \frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,dt$$

نكمل بالنظرية.

## المعادلات الخطية

$$y'+p(x)y=q(x)$$

$$\mu=e^{\int p(x)dx}$$

مثال:

$$y'+\frac{1}{x}y=\ln x$$

$$\mu=e^{\int \frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

$$x\cdot y'+y=x\cdot\ln x$$

$$[x\cdot y]'=x\cdot\ln x$$

نكامل طرفي المعادلة:

$$x\cdot y=\int x\cdot\ln x\,dx$$

$$u=\ln x \qquad du=\frac{1}{x}$$

$$dv=x \qquad v=\frac{x^2}{2}$$

$$x\cdot y=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\cdot dx$$

$$x\cdot y=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C \Rightarrow$$

$$y=\frac{x}{2}\ln x-\frac{1}{4}x+\frac{C}{x}$$

مثال:

$$y' + \frac{3}{x} y = x^4$$

$$\mu = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$x^3 y' + 3x^2 y = x^7$$

$$[x^3 . y]' = x^7$$

$$x^3 . y = \int x^7 . dx = x^3 y = \frac{x^8}{8} + c$$

$$\rightarrow y = \frac{x^5}{8} + \frac{c}{x^3}$$

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y' + 3y = e^{2x}$$

$$\mu = e^{\int 3 dx} = e^{3x}$$

$$e^{3x} y' + 3e^{3x} y = e^{5x}$$

$$(e^{3x} y)' = e^{5x}$$

$$e^{3x} y = \frac{1}{5} e^{5x} + c$$

$$y = \frac{1}{5} e^{2x} + \frac{c}{e^{3x}}$$

مثال:

$$y' - xy = x$$

$$\mu = e^{-\int x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y = \int x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

نفرض $t = -\frac{x^2}{2}$

$$dt = -x dx$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y = -\int e^t dt$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

$$y = -1 + c e^{\frac{x^2}{2}}$$

مثال: أوجد الحل

$$y' + \frac{3}{x} y = x^2$$

$$\mu = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$x^3 . y = \int x^5 . dx$$

$$x^3 . y = \frac{x^6}{6} + c$$

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{c}{x^3}$$

* معادلة برنولي:

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n$$

$\Leftarrow y^n$ نقسم على

$$y^{-n}\,y' + p(x)\,y^{1-n} = q(x)$$

نفرض $z = y^{1-n}$ نعوض في المعادلة فنرد الى خطية ونوجد $z'$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x\,y' + y = y^3$$

الحل:

$$y' + \frac{1}{x}\,y = \frac{1}{x}\,y^3$$

نقسم على $y^3$

$$y^{-3}\,y' + \frac{1}{x}\,y^{-2} = \frac{1}{x}$$

نفرض أن $z = y^{-2}$ ,

$$z' = -2\,y^{-3}\,y'$$

أصبحت معادلة خطية $\frac{1}{2}z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}$ نضرب المعادلة بـ $-2$ $\Leftarrow$

$$z' - \frac{2}{x}z = -\frac{2}{x}$$

$$\mu = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل $\frac{1}{x^2}$:

$$\left[\frac{1}{x^2}z\right]' = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{x^2}z = \int -2x^3\,dx$$

$$\frac{1}{x^2}z = x^{-2} + c$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $x^2$ $\Leftarrow$

$$z = 1 + cx^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2} = 1 + cx^2$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{1+cx^2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{1+cx^2}}$$

* معادلة ريكاتي :

- يعطى فيها حل خاص $y_1$ يمكن طرقتي حل يقينيتين

أ) نردها إلى برنولي $y = y_1 + z$

ب) أو نردها إلى خطية $y = y_1 + \frac{1}{z}$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = xy^2 + (1-2x)y + x - 1$

علماً أنها تقبل الحل الخاص $y_1 = 1$

الحل: $y = 1 + \frac{1}{z}$ نفرض $z = \frac{1}{y-1}$ ، نفرض

$$y' = \frac{-z'}{z^2}$$

$$-\frac{z'}{z^2} = x\left(1+\frac{1}{z}\right)^2 + (1-2x)\left(1+\frac{1}{z}\right) + x - 1$$

$$\frac{-z'}{z^2} = x + \frac{2x}{z} + \frac{x}{z} + 1 + \frac{1}{z} - 2x - \frac{2x}{z} + x - 1$$

$$\frac{-z'}{z^2} = \frac{x}{z^2} + \frac{1}{z}$$

$$z' = -x - z \Rightarrow z' + z = -x$$

مثال

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x$$

علماً أنها تقبل الحل الخاص $y_1 = e^x$

الحل: نردها إلى برنولي:

نفرض أن $y = y_1 + z$ ، $y = e^x + z$ ، $y' = e^x + z'$

$$e^x + z' = (e^x + z)^2 - 2e^x(e^x + z) + e^{2x} + e^x$$

$$e^x + z' = e^{2x} + 2e^x z + z^2 - 2e^{2x} - 2e^x z + e^{2x} + e^x$$

$$z' = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 \quad ; \quad \frac{dz}{z^2} = dx \quad ; \quad -\frac{1}{z} = x + c$$

$$-\frac{1}{y - e^x} = x + c \quad ; \quad y - e^x = -\frac{1}{x+c} \quad , \quad y = e^x - \frac{1}{x+c}$$

انتهت المحاضرة